



88047413

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Miércoles 3 de noviembre de 2004 (tarde)

2 horas

Código del colegio

--	--	--	--	--	--

Código del alumno

--	--	--	--	--	--

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba el código del colegio y su código de alumno en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Indicar la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen.

Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, puede utilizar para sus cálculos el espacio que queda debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. Considere $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + k$. Halle el valor de k si $(x + 2)$ es un divisor de $f(x)$.

Operaciones:

Respuesta:

2. Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & p & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ es singular, halle el valor de p .

Operaciones:

Respuesta:

3. La suma de los n primeros términos de una serie viene dada por

$$S_n = 2n^2 - n, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}^+ .$$

- (a) Halle los tres primeros términos de la serie.
- (b) Halle una expresión para el término n -ésimo de la serie, dando la respuesta en función de n .

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

4. Sabiendo que $(a + i)(2 - bi) = 7 - i$, halle el valor de a y de b , tal que $a, b \in \mathbb{Z}$.

Operaciones:

Respuesta:

5. Si $y = \ln(2x - 1)$, halle $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Operaciones:

Respuesta:

6. Se tira un dado, perfectamente equilibrado, cuyos seis lados presentan los números 1, 1, 2, 3, 4, 5. Halle la media y la varianza de la puntuación.

Operaciones:

Respuesta:

7. (a) Halle el mayor conjunto S de valores de x tal que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$ tome valores reales.
- (b) Halle el recorrido de la función f definida sobre el dominio S .

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

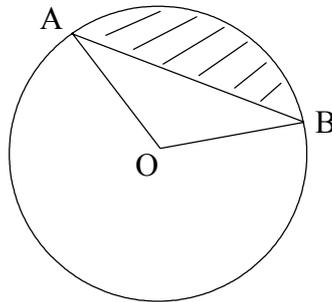
8. (a) Halle el desarrollo de $(2+x)^5$, expresando la respuesta en orden ascendente de potencias de x .
- (b) Tomando $x = 0,01$ o de cualquier otro modo, halle el valor **exacto** de $2,01^5$.

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

9. El siguiente diagrama muestra un círculo de centro O y radio $OA = 5$ cm.
El ángulo $AOB = 135^\circ$.



Halle el área de la región sombreada.

Operaciones:

Respuesta:

10. Considere la ecuación $e^{-x} = \cos 2x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

(a) ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación?

(b) Halle la solución más próxima a 2π , expresando la respuesta con **cuatro** cifras decimales.

Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____

11. Considere los cuatro puntos A(1, 4, -1), B(2, 5, -2), C(5, 6, 3) y D(8, 8, 4). Halle el punto de intersección entre las rectas (AB) y (CD).

Operaciones:

Respuesta:

12. Una variable aleatoria continua X tiene un función densidad de probabilidad dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= k(2x - x^2), & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) &= 0, & \text{para el resto.} \end{aligned}$$

- (a) Halle el valor de k .
- (b) Halle $P(0,25 \leq x \leq 0,5)$.

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

13. Sabiendo que $z \in \mathbb{C}$, resuelva la ecuación $z^3 - 8i = 0$, expresando las respuestas en la forma $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$.

Operaciones:

Respuesta:

14. Halle el área total de las dos regiones encerradas por la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ y la recta $y = x + 3$.

Operaciones:

Respuesta:

15. Halle los valores de m tales que para todo x

$$m(x+1) \leq x^2.$$

Operaciones:

Respuesta:

16. Halle la ecuación de la normal a la curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ en el punto (2, 4).

Operaciones:

Respuesta:

17. Utilizando la sustitución $2x = \text{sen } \theta$, o de cualquier otro modo, halle $\int (\sqrt{1 - 4x^2}) dx$.

Operaciones:

Respuesta:

18. Una lata cilíndrica cerrada tiene un volumen de 500 cm^3 . La altura de la lata es h cm y el radio de la base es r cm.
- (a) Halle una expresión para la superficie total A de la lata en función de r .
- (b) Dado que hay un valor mínimo de A para $r > 0$, halle este valor de r .

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

19. (a) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene al origen O y los dos puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(2, -1, 3)$.
- (b) Halle la distancia desde el punto $C(10, 5, 1)$ al plano OAB .

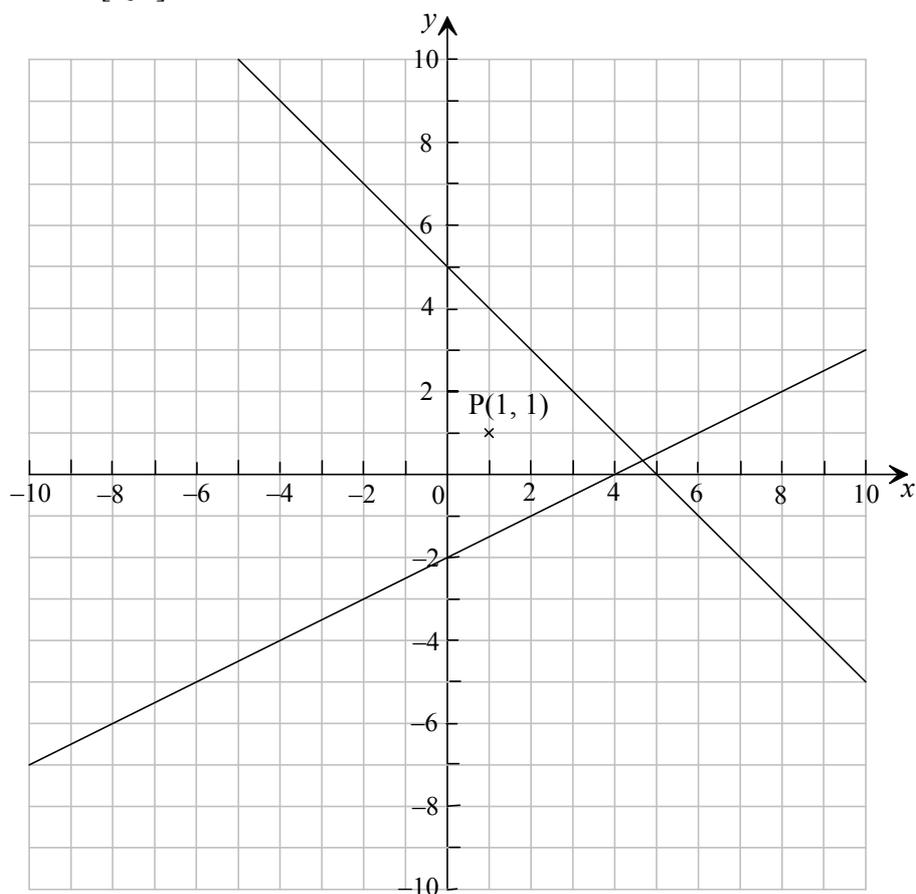
Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____

20. El siguiente diagrama muestra las rectas $x - 2y - 4 = 0$, $x + y = 5$ y el punto $P(1, 1)$. Se dibuja una recta desde P que corta a $x - 2y - 4 = 0$ en Q , y a $x + y = 5$ en R , de tal modo que P es el punto medio de $[QR]$.



Halle el valor **exacto** de las coordenadas de Q y de R .

Operaciones:

Respuesta:
